三元边界奇点在 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价下的分类及识别*

郭瑞芝 [1]，谢瑞芳 [2]

(1.湖南师范大学数学与计算机科学学院, 中国 长沙 410081;2.韶关学院数学与信息科学学院, 中国 韶关 512005)

摘 要 运用 Nakayama 引理, 得到了三元边界奇点在 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价下的一个充分必要条件, 给出了这种等价下, 余维数不大于 3 的三元边界奇点的分类及相应的识别条件. .

关键词 右等价; 分类; 识别; 边界奇点;

中图分类号: O192 **文献标识码**:

The Classification and Recognition of Boundary Singularities with Three Variables under $\mathscr{R}_H^*$–Equivalent

GUO Rui-zhi[1] , XIE Rui-fang[2]

(1.College of Mathematics and Computer Science Hunan Normal University Changsha 410081,China;
2. School of Mathematics and Information Science Shaoguan University shaoguan 512005,China)

Abstract A sufficient and necessary condition of boundary singularities with three variables under $\mathscr{R}_H^*-$ equivalence is got by using Nakayama Lemma and the classification and recognition of boundary singularities with three variables under this equivalence group up to co-dimension 3 are given.

Keywords right equivalence ; classification; recognition;boundary singularity

在奇点理论中, 研究低余维奇点的分类与识别是一个非常活跃的课题 . 由于等价关系的不同, 可以得到不同的分类结果. 见文献 [5, 6, 7]. 文献 [2, 3] 中给出了边界奇点的概念, 并给出了 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价下关于内蕴理想的命题, 文献 [1] 给出了 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价下, 余维数不大于 4 的二元边界奇点的完整分类及识别. 受上述工作的启发, 本文讨论三元边界奇点问题, 得到了 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价的一个充分必要条件, 给出了余维数不大于 3 的三元边界奇点在 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价下的分类及相应的识别条件.

1 预备知识

*基金项目：国家自然科学基金 10971060, 湖南省教育厅项目 08C578 .

C^∞ 函数在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处的函数芽组成的集合记为 ε_n, $\mathscr{M}_n$ 为其极大理想, 由坐标函数芽 $x_1, ..., x_n$ 生成. 三元函数芽 g 构成的集合记为 $\varepsilon_{x,y,z}$, $\varepsilon_{x,y,z}$ 有极大理想 $\mathscr{M}_3$, 简记为 $\mathscr{M}$.

设 $(H, 0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中包含原点的二维光滑子流形芽, 特别地, 取 $H = \{(x, y, z)|z = 0\}$. 若 $g \in \varepsilon_{x,y,z}$ 满足 $g(0, 0, 0) = g_x(0, 0, 0) = g_y(0, 0, 0) = g_z(0, 0, 0) = 0$, 则 $(0, 0, 0)$ 为 g 的奇点. 若 g 还满足 $g|_H = 0$, 即 $g(x, y, 0) = 0$, 则称 g 为一个三元边界奇点问题. 易见所有三元边界奇点问题 g 构成的集合为 $\varepsilon_{x,y,z} \cdot < z >$.

令 $\mathscr{R} = \{\Phi|\Phi$ 为 $(\mathbb{R}^3, 0)$ 中的微分同胚芽 $\}$, 则 $\mathscr{R}$ 在映射的复合下构成一个群，称为右等价群 [4,7], 令

$$\mathscr{R}_H^* = \{\Phi \in \mathscr{R}|\Phi(x, y, z) = (\Phi_1(x, y, z), \Phi_2(x, y, z), \Phi_3(x, y, z)), \Phi_3(x, y, 0) = 0\}.$$

则 $\mathscr{R}_H^*$ 是右等价群 $\mathscr{R}$ 的子群.

定义 1　设 $g, h \in \varepsilon_{x,y,z}$, 如果存在 $\Phi \in \mathscr{R}_H^*$, 使得 $g = h \circ \Phi$. 则称 g 和 h 是 $\mathscr{R}_H^*-$ 等价的. 简记为 $g \sim h$.

在奇点理论中的一个非常有意义的课题是一个奇点问题在什么条件下等价于给定的标准形式, 因此必须寻找这一标准型在等价群 $\mathscr{R}_H^*$ 作用下的轨道特征, 借助于奇点理论中的有限决定性, 这一问题可以约化为有限维来处理. 可以将轨道描述为这样一些函数芽组成, 它们的 Taylor 系数满足有限多个等式和不等式来约束, 而这一描述正是识别问题的解.

轨道 $\mathscr{R}_H^* \cdot g$ 在 g 处的切空间定义为 $T(g) = \varepsilon_{x,y,z} < xg_x, yg_x, zg_x, xg_y, yg_y, zg_y, zg_z > .$

定义 2　设　$g \in \varepsilon_{x,y,z} \cdot < z >$. 若 $\varepsilon_{x,y,z} \cdot < z > /T(g)$ 为有限维实向量空间，称 g 是有限余维的. 实向量空间 $\varepsilon_{x,y,z} \cdot < z > /T(g)$ 的维数称为 g 在 $\varepsilon_{x,y,z} \cdot < z >$ 中的余维数, 记为 $codimg$.

2 主要结果及证明

在给出主要结果及其证明前, 我们需要下面的引理.

引理 1[4]　(Nakayama 引理) 设 A 是一个具有幺元素的交换环,I 为 A 中具有下列性质的理想，对每一个 $\alpha \in I$,$1 + \alpha$ 都是 A 中的可逆元. 假设 M 和 N 为 $A-$ 模 P 的子模, 且 M 是有限生成的, 若 $M \subset N + I \cdot M$, 则 $M \subset N$.

引理 2　若 $p \in T(g)$, 且 $T(g + tp) = T(g)$, 对于 $\forall t \in (\mathbb{R}, 0)$, 则

$$\exists\, a, b \in \varepsilon_{x,y,z,t} < x, y, z >, c \in \varepsilon_{x,y,z,t} < z >$$

使得

$$p(x, y, z) = a(x, y, z, t)G_x(x, y, z, t) + b(x, y, z, t)G_y(x, y, z, t) + c(x, y, z, t)G_z(x, y, z, t),$$

其中 $G(x, y, z, t) = g(x, y, z) + tp(x, y, z)$.

引理 3　若 $p \in T(g)$, 且 $T(g + tp) = T(g)$, $\forall t \in (\mathbb{R}, 0)$, 则对于任意 $t \in (\mathbb{R}, 0)$,$g + tp$ 与 g 是 $\mathscr{R}_H^*$ 等价的.

这两个引理的证明仿文献 [1,2] 相关命题的证明即可.

引理 4 设 $g \in \varepsilon_{x,y,z} \cdot < z >$ 是有限余维的且余维数大于 0, 则存在自然数 $l \geq 1$, 使得 g 可表示为

$$g = z[h + k],$$

其中 $h \in \varepsilon_{x,y}$ 且 h 关于 x, y 是 $(l-1)$ 阶平坦的,$k \in \varepsilon_{x,y,z} < z >$.

证 因为 $g \in \varepsilon_{x,y,z} < z >$, 所以存在 $f \in \varepsilon_{x,y,z}$ 使 $g(x,y,z) = zf(x,y,z)$, 则

$$g_z(x,y,z) = f(x,y,z) + zf_z(x,y,z).$$

又 $g_z(0,0,0) = f(0,0,0) = 0$, 故 $f \in \mathscr{M}_{x,y,z}$. 令

$$k(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,y,0), h(x,y) = f(x,y,0), \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2, 0),$$

易见,$k(x,y,z) \in \varepsilon_{x,y,z} < z >$, 且 $h(x,y) \in \mathscr{M}_{x,y}$.

下面证明存在自然数 $l \geq 1$ 使得 $h \in \mathscr{M}_{x,y}$ 是 $l-1$ 阶平坦的. 令

$$W = T(g) = \varepsilon_{x,y,z} < xg_x, yg_x, zg_x, xg_y, yg_y, zg_y > + \varepsilon_{x,y,z} < zg_z > .$$

因为 (x,y,z)=zf(x,y,z), 所以

$$g_x = zf_x, g_y = zf_y, g_z = f + zf_z,$$

$$\begin{aligned} T(g) &= \varepsilon_{x,y,z} < zxf_x, zyf_x, z^2f_x, zxf_y, zyf_y, z^2f_y > + \varepsilon_{x,y,z} < zf + z^2f_z > \\ &= \varepsilon_{x,y,z} < z > (< xf_x, yf_x, zf_x, xf_y, yf_y, zf_y > + \varepsilon_{x,y,z} < f + zf_z >) \\ &= \varepsilon_{x,y,z} < z > (< xf_x, yf_x, zf_x, xf_y, yf_y, zf_y, f + zf_z >), \end{aligned}$$

因此, $\varepsilon_{x,y,z} \cdot < z > / T(g) = \varepsilon_{x,y,z} / T_1(f)$, 其中 $T_1(f) = \varepsilon_{x,y,z} < xg_x, yg_x, zg_x, xg_y, yg_y, zg_y, zg_z >$.

因为 g 是有限余维的, 所以 $T_1(f)$ 在 $\varepsilon_{x,y,z}$ 中是有限余维的子空间.

令 $i^* : \varepsilon_{x,y,z} \to \varepsilon_{x,y}$ 为包含映射 $i : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0), \imath(x,y) = (x,y,0)$ 诱导的同态 i^*,forall h$\in$ $\varepsilon_{x,y,z}, i^*(h)(x,y) = h \circ i(x,y) = h(x,y,0)$, 则 $\forall \lambda \in \varepsilon_{x,y}, \lambda(x,y) \in \mathbb{R}$, 作 $h(x,y,z) = \lambda(x,y)$, 则 $h \in \varepsilon_{x,y,z}, i^*(h)(x,y) = h(x,y,0) = \lambda(x,y)$, 这说明 i^* 是满同态, 于是 i^* 将 $\varepsilon_{x,y,z}$ 中的余维有限的子空间映为 $\varepsilon_{x,y}$ 中余维有限的子空间, 特别,

$$i^*(xf_x) = xf_x(x,y,0) = xh_x,\ i^*(yf_x) = xf_x(x,y,0) = yh_x,\ i^*(zf_x) = 0,$$

$$i^*(xf_y) = xf_y(x,y,0) = xh_y, i^*(yf_y) = yf_y(x,y,0) = yh_y, i^*(zf_y) = 0,$$

$$i^*(f + zf_z) = f(x,y,0) = h,$$

于是 $i^*(T_1(f)) =< h, xh_x, yh_x, xh_y, yh_y > \varepsilon_{x,y} = T_2(h) \subset \varepsilon_{x,y}$ 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中的理想. 因此由 $T_1(f)$ 在 $\varepsilon_{x,y,z}$ 中的余维有限, 可得 $i^*(T_1(f))$ 在 $\varepsilon_{x,y}$ 中余维有限.

由文献 [4] 中推论知存在 $m \geq 1 s.t. \mathscr{M}_{x,y}^m \subset T_2(h)$, 从而存在 $a_{ij} \in \varepsilon_{x,y}, i, j = 0, 1, 2, \cdots, m$, 使

$x^m = a_{01}h + a_{02}xh_x + a_{03}yh_x + a_{04}xh_y + a_{05}yh_y$,

$x^{m-i}y = a_{i1}h + a_{i2}xh_x + a_{i3}yh_x + a_{i4}xh_y + a_{i5}yh_y, i = 1, 2, \cdots, m$,

显然 $h(0,0) = 0$, 考察 h 在 $(0,0)$ 处的各阶导网 $j^0h(0), j^1h(0), j^2h(0), \cdots, j^mh(0)$ 知, 存在自然数 l, 使得 $j^0h(0,0) = j^1h(0,0) = \cdots = j^{l-1}h(0,0) = 0$, $j^lh(0,0) \neq 0$. 即 h 关于 x, y 是 $l-1$ 平坦的. 这时 $g(x,y,z) = zf(x,y,z) = z(f(x,y,z) - f(x,y,0) + f(x,y,0) = z(k(x,y,z) + h(x,y))$, 且 $h(x,y)$ 是 $l-1$ 阶平坦的. 证毕.

引理 5 设 $g \in \varepsilon_{x,y,z} < z >$ 是有限余维的, $g(x,y,z) = zf = z(h+k), h, k$ 如引理 4, 则

(1)$T(g) \subset < \mathscr{M}_{x,y}^l, z > \varepsilon_{x,y,z} < z >, codimg \geq \frac{l(l+1)}{2}$.

(2) 当 $l = 1$ 时,$T_1(f) = \mathscr{M}_{x,y,z}, T(g) = \mathscr{M}_{x,y,z}\varepsilon_{x,y,z} < z >= \mathscr{M}_{x,y,z}, codimg = 1$;

(3) 当 $l \geq 2$ 时,$T(g) \subset \mathscr{M}_{x,y,z}^2 \cdot \varepsilon_{x,y,z} < z >, codimg \geq \frac{l(l+1)}{2}$;

(4) 当 $l = 2$ 时,

(i) 当 $q(0) = 0$ 时,$codimg \geq 4$;

(ii) 当 $q(0) \neq 0$ 时 ,$\begin{cases} h_{xx}(0)h_{yy}(0) - h_{xy}^2(0) \neq 0, codimg = 3; \\ h_{xx}(0)h_{yy}(0) - h_{xy}^2(0) = 0, codimg \geq 4. \end{cases}$

证 考察 g 的切空间的特点, 即考虑 $T_2(h) =< h, xh_x, yh_x, xh_y, yh_y > \varepsilon_{x,y}$,
$g(x,y,z) = zf(x,y,z) = z(h(x,y) + zq(x,y,z)), h(x,y)$ 是 $l-1$ 阶平坦的, 即

$$l \geq 1, h \in \mathscr{M}_{x,y}^l, \ f(x,y,z) = h(x,y) + zq(x,y,z),$$

$$f_x = h_x + zq_x, \ f_y = h_y + zq_y, \ f_z = zq_z + q(x,y,z),$$

$$xf_x = xh_x + xzq_x \in \mathscr{M}_{x,y}^l + \mathscr{M}_{x,y,z}^2, \ yf_x = yh_x + yzq_x \in \mathscr{M}_{x,y}^l + \mathscr{M}_{x,y,z}^2,$$

$$zf_x = zh_x + z^2q_x \in \mathscr{M}_{x,y}^l + \mathscr{M}_{x,y,z}^2, \ zf_y = zh_y + z^2q_y \in \mathscr{M}_{x,y}^l + \mathscr{M}_{x,y,z}^2,$$

$$xf_y = xh_y + xzq_y \in \mathscr{M}_{x,y}^l + \mathscr{M}_{x,y,z}^2, \ yf_y = yh_y + yzq_y \in \mathscr{M}_{x,y}^l + \mathscr{M}_{x,y,z}^2,$$

$$f + zf_z = h + 2zq + z^2q_z \in < \mathscr{M}_{x,y}^l, z >,$$

所以 $T_1(f)$ 在 $\varepsilon_{x,y,z}$ 中的余维数 $\geq \frac{l(l+1)}{2}$. 故 $T(g)$ 的余维数 $\geq \frac{l(l+1)}{2}$, 即 (1) 成立.

下面证明 (2). 当 $l = 1$ 时, 则 $h(x,y) = h_x(0)x + h_y(0)y + \cdots, h_x(0), h_y(0)$ 不同时为 0.

$$f(x,y,z) = h_x(0)x + h_y(0)y + h_{xx}(0)x^2 + 2h_{xy}(0)xy + h_{yy}(0)y^2$$
$$+ \cdots + zq(0) + zxq_x(0) + zyq_y(0) + z^2q_z(0) + \cdots,$$

$$f_x(x,y,z) = h_x(0) + 2xh_{xx}(0) + 2yh_{xy}(0) + zq_x(0) + \cdots,$$

$$f_y(x,y,z) = h_y(0) + 2xh_{xy}(0) + 2yh_{yy}(0) + zq_y(0) + \cdots,$$

$$f_z(x,y,z) = q(0) + xq_x(0) + yq_y(0) + 2zq_x(0) + \cdots,$$

$$xf_x(x,y,z) = xh_x(0) + 2x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + xzq_x(0) + \cdots,$$

$$yf_x(x,y,z) = yh_x(0) + 2xyh_{xx}(0) + 2y^2h_{xy}(0) + zyq_x(0) + \cdots,$$

$$zf_x(x,y,z) = zh_x(0) + 2zxh_{xx}(0) + 2zyh_{xy}(0) + z^2q_x(0) + \cdots,$$

$$xf_y(x,y,z) = xh_y(0) + 2x^2h_{xy}(0) + 2xyh_{yy}(0) + 2xzq_y(0) + \cdots,$$

$$yf_y(x,y,z) = yh_y(0) + 2xyh_{xy}(0) + 2y^2h_{yy}(0) + 2yzq_y(0) + \cdots,$$

$$zf_y(x,y,z) = zh_y(0) + 2xzh_{xy}(0) + 2zyh_{yy}(0) + 2z^2q_y(0) + \cdots,$$

$$f(x,y,z) + zf_z(x,y,z) = xh_x(0) + yh_y(0) + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0) + zq(0)$$

$$+zxq_x(0) + zyq_y(0) + z^2q_z(0) + zq(0) + xzq_x(0) + zyq_y(0) + 2z^2q_x(0) + \cdots.$$

容易验证 $T_1(f) \subset \mathscr{M}_{x,y,z}$, 下面要证 $\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f)$, 由 *Nakayama* 引理, 只要证 $\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f) + \mathscr{M}_{x,y,z}^2$, 为此, 只要 $T_1(f)$ 的生成元截去二次及其以上的项, 用的生成元表示列成表列

表 1:

	x	y	z
xf_x	$h_x(0)$		
yf_x		$h_x(0)$	
zf_x			$h_x(0)$
xf_y	$h_y(0)$		
yf_y		$h_y(0)$	
zf_y			$h_y(0)$
$f + zf_z$	$h_x(0)$	$h_y(0)$	$q(0)$

当 $h_x(0), h_y(0)$ 不同时为 0 时，不论 $q(0)$ 是否为 0, 表 1 中元素构成矩阵的秩均为 3, 即 x, y, z 可以表示成 $T_1(f)$ 的生成元的形式, 故有 $\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f) + \mathscr{M}_{x,y,z}^2$, 从而有 $\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f)$, 由此得 $T_1(f) = \mathscr{M}_{x,y,z}$, 又 $\mathscr{M}_{x,y,z}$ 在 $\varepsilon_{x,y,z}$ 的余维数是 1. 故 $codimg = codimT_1(f) = 1$.

(3) 当 $l \geq 2, q(0) \neq 0$ 时,$codimg \geq \frac{l(l+1)}{2}$. $f(x,y,z) = h(x,y) + zq(0) + zxq_x(0) + zyq_y(0)z^2q_z(0) + \cdots$, $f_x = h_x + zq_x(0) + \cdots$, $f_y = h_y + zq_y(0) + \cdots$, $f_z = q(0) + xq_x(0) + \cdots$, 容易验证 $T_1(f) \subset < \mathscr{M}_{x,y}^l, z > \varepsilon_{x,y,z}$, 而 $< \mathscr{M}_{x,y}^l, z > \varepsilon_{x,y,z}$ 在 $\varepsilon_{x,y,z}$ 中的余维数 $\geq \frac{l(l+1)}{2}$.

(4) 当 $l = 2, q(0) = 0$, 时, 与 $h(x,y) = x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0) + \cdots$ 有关.

$$q(x,y,z) = xq_x(0) + yq_y(0) + zq_z(0) + \cdots,$$

$$f(x,y,z)=h(x,y)+zq(x,y,z)=x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+y^2h_{yy}(0)+xzq_x(0)+yzq_y(0)+z^2q_z(0)+\cdots,$$

$$f_x(x,y,z)=2xh_{xx}(0)+2yh_{xy}(0)+zq_x(0)+\cdots,$$

$$f_y(x,y,z)=2xh_{xy}(0)+2yh_{yy}(0)+zq_y(0)+\cdots,$$

$$f_z(x,y,z)=xq_x(0)+yq_y(0)+2zq_z(0)+\cdots,$$

$$xf_x(x,y,z)=2x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+xzq_x(0)+\cdots,$$

$$yf_x(x,y,z)=2xyh_{xx}(0)+2y^2h_{xy}(0)+zyq_x(0)+\cdots,$$

$$zf_x(x,y,z)=2zxh_{xx}(0)+2zyh_{xy}(0)+z^2q_x(0)+\cdots,$$

$$xf_y(x,y,z)=2x^2h_{xy}(0)+2xyh_{yy}(0)+xzq_y(0)+\cdots,$$

$$yf_y(x,y,z)=2xyh_{xy}(0)+2y^2h_{yy}(0)+yzq_y(0)+\cdots,$$

$$zf_y(x,y,z)=2xzh_{xy}(0)+2zyh_{yy}(0)+z^2q_y(0)+\cdots,$$

$$f(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+y^2h_{yy}(0)+2xzq_x(0)+2yzq_y(0)+3z^2q_z(0)+\cdots,$$

显然,$T_1(f)\subset\mathscr{M}^2_{x,y,z}$, 于是 $codimg=codimf\geq codim\mathscr{M}^2_{x,y,z}=4$.

当 $l=2,q(0)\neq 0$ 时,

$$h(x,y,z)=x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+y^2h_{yy}(0)+\cdots,\ q(x,y,z)=q(0)+xq_x(0)+yq_y(0)+zq_z(0)+\cdots,$$

$$f(x,y,z)=h(x,y)+zq(x,y,z)=zq(0)+x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+y^2h_{yy}(0)+$$

$$xzq_x(0)+yzq_y(0)+z^2q_z(0)+\cdots,$$

$$f_x(x,y,z)=2xh_{xx}(0)+2yh_{xy}(0)+zq_x(0)+\cdots,\ f_y(x,y,z)=2xh_{xy}(0)+2yh_{yy}(0)+zq_y(0)+\cdots,$$

$$f_z(x,y,z)=q(0)+xq_x(0)+yq_y(0)+2zq_z(0)+\cdots,$$

$$xf_x(x,y,z)=2x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+xzq_x(0)+\cdots,$$

$$yf_x(x,y,z)=2xyh_{xx}(0)+2y^2h_{xy}(0)+zyq_x(0)+\cdots,$$

$$zf_x(x,y,z)=2zxh_{xx}(0)+2zyh_{xy}(0)+z^2q_x(0)+\cdots,$$

$$xf_y(x,y,z)=2x^2h_{xy}(0)+2xyh_{yy}(0)+xzq_y(0)+\cdots,$$

$$yf_y(x,y,z)=2xyh_{xy}(0)+2y^2h_{yy}(0)+yzq_y(0)+\cdots,$$

$$zf_y(x,y,z)=2xzh_{xy}(0)+2zyh_{yy}(0)+z^2q_y(0)+\cdots,$$

$$f(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=2zq(0)+x^2h_{xx}(0)+2xyh_{xy}(0)+y^2h_{yy}(0)$$

$$+2xzq_x(0)+2yzq_y(0)+3z^2q_z(0)+\cdots.$$

容易验证 $T_1(f) \subset < \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$, 下面要证明 $< \mathscr{M}_{x,y}^2, z > \subset T_1(f)$. 由 Nakayama 引理只要证 $< \mathscr{M}_{x,y}^2, z > \subset T_1(f) + \mathscr{M}_{x,y,z} < \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$, 又 $\mathscr{M}_{x,y,z} < \mathscr{M}_{x,y}^2, z > = \mathscr{M}_{x,y,z} < x^2, xy, y^2, z > = < x^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^3, xz, yz, z^2, xyz >$ 我们将 $T_1(f)$ 的生成元截去 $\mathscr{M}_{x,y,z} < \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$ 中元素后用 $< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$ 的生成元表示列成表 2.

表 2:

	x^2	xy	y^2	z
xf_x	$2h_{xx}(0)$	$2h_{xy}(0)$		
yf_x		$2h_{xx}(0)$	$2h_{xy}(0)$	
zf_x				
xf_y	$2h_{xy}(0)$	$2h_{yy}(0)$		
yf_y		$2h_{xy}(0)$	$2h_{yy}(0)$	
zf_y				
$f + zf_z$	$h_{xx}(0)$	$2h_{xy}(0)$	$h_{yy(0)}$	$2q(0)$

考察表 2 中的矩阵的秩, 当 $h_{xx}(0) \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} 2h_{xx}(0) & 2h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 2h_{xx}(0) & 2h_{xy}(0) & 0 \\ 2h_{xy}(0) & 2h_{yy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 2h_{xy}(0) & 2h_{yy}(0) & 0 \\ h_{xx}(0) & 2h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 2q(0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{yy}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{xx}(0)} & 0 & 0 \\ 0 & h_{xy} & h_{yy} & 0 \\ 0 & 2h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 2q(0) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{yy}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{xx}(0)} & 0 & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q(0) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{yy}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{xx}(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{xx}(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q(0) \end{pmatrix}$$

由此可得, 若 $h_{xx}(0)\neq 0$, 则

(a) $h_{xx}(0)h_{yy}(0)-h_{xy}^2(0)\neq 0$, 上述矩阵的秩为 4, 于是 $T_1(f)=<\mathscr{M}_{x,y}^2, z>$, $codimg=codimf=3$;

(b) $h_{xx}(0)h_{yy}(0)-h_{xy}^2(0)=0$, 上述矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q(0) \end{pmatrix},$$

该矩阵的秩为 3, $T_1(f)\subsetneq<\mathscr{M}_{x,y}^2, z>$, 这时 $codimg\geq 4$.

同理可证, 若 $h_{xx}(0)\neq 0$, 也有上述结论成立. 若 $h_{xx}(0)=h_{yy}(0)=0$, 但 $h_{xy}(0)\neq 0$, 则 $h_{xx}(0)h_{yy}(0)-h_{xy}^2(0)\neq 0$, 这时表 2 中矩阵的秩亦为 4, 于是 $T_1(f)=<\mathscr{M}_{x,y}^2, z>$, $codimg=codimf=3$. 因此可得结论成立.

定理 若 $g(x,y,z)\in\varepsilon_{x,y,z}\cdot<z>$ 且 $codimg\leq 3$, 则 g 必与下列标准形式之一等价.

标准形式	余维数	识别条件
$g_1(x,y,z)=z$	0	$g(x,y,0)=0$, $g_z(0,0,0)\neq 0$(非奇点).
$g_2(x,y,z)=xz$	1	$g(x,y,0)=g_z(0,0,0)=0$, $g_{zx}(0,0,0), g_{zy}(0,0,0)$不同时为0.
$g_3(x,y,z)=z(z+x^2+y^2)$	3	$g(x,y,0)=g_z(0,0,0)=$ $g_{zx}(0,0,0)=g_{zy}(0,0,0)=0$, $g_{zxx}(0,0,0)g_{zyy}(0,0,0)-g_{zxy}^2(0,0,0)>0$.
$g_4(x,y,z)=z(z+x^2-y^2)$	3	$g(x,y,0)=g_z(0,0,0)=$ $g_{zx}(0,0,0)=g_{zy}(0,0,0)=0$, $g_{zxx}(0,0,0)g_{zyy}(0,0,0)-g_{zxy}^2(0,0,0)<0$.

证明 下设 $g\in\varepsilon_{x,y,z}<z>$, 且 $codimg\leq 3$, 则由引理 4 知, g 可表示为

$$g=zf=z(h(x,y)+zq(x,y,z)),$$

其中 $h\in\mathscr{M}_{x,y}^l$, $q\in\varepsilon_{x,y,z}$, 由引理 5,$codimg\geq\frac{l(l+1)}{2}$, 而我们讨论的边界奇点的余维数 ≤ 3, 故 $l\leq 2$.

当 $l=1$ 时,g 具有形式 $g_1(x,y,z)=z(a_1x+a_2y+zq(x,y,z))$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, a_1,a_2 不同时为 0. 这时

$$f_1(x,y,z)=a_1x+a_2y+zq(x,y,z),_{1x}(x,y,z)=a_1+zq_x(x,y,z),$$

$$f_{1y}(x,y,z) = a_2 + zq_y(x,y,z),_{1z}(x,y,z) = q(x,y,z) + zq_z(x,y,z),$$

$$xf_{1x}(x,y,z) = xa_1 + xzq_x(x,y,z),_{1x}(x,y,z) = ya_1 + yzq_x(x,y,z),$$

$$zf_{1x}(x,y,z) = za_1 + z^2q_x(x,y,z),_{1y}(x,y,z) = xa_2 + xzq_y(x,y,z),$$

$$yf_{1y}(x,y,z) = ya_2 + yzq_y(x,y,z),_{1y}(x,y,z) = za_2 + z^2q_y(x,y,z),$$

$$f_1(x,y,z) + zf_{1z}(x,y,z) = a_1x + a_2y + 2zq(x,y,z) + z^2q_z(x,y,z).$$

显然, $xf_{1x}, yf_{1x}, zf_{1x}, xf_{1y}, yf_{1y}, zf_{1y}$, $f_1 + zf_{1z} \in \mathscr{M}_{x,y,z}$, 即 $T_1(f) \subset \mathscr{M}_{x,y,z}$. 下面证 $\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f)$, 由 Nakayama 引理, 只要证

$$\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f) + < \mathscr{M}^2_{x,y}, z >,$$

为此我们将 $T_1(f)$ 生成元去掉 $\mathscr{M}^2_{x,y,z}$ 中的项后用 $\mathscr{M}_{x,y,z}$ 中的生成元表示，列成表 3 如下.

表 3:

	x	y	z
xf_{1x}	a_1		
yf_{1x}		a_1	
zf_{1x}			a_1
xf_{1y}	a_2		
yf_{1y}		a_2	
zf_{1y}			a_2
$f_1 + zf_{1z}$	a_1	a_2	$2q(0)$

由于 a_1, a_2 不同时为 0, 不论 $q(0)$ 是否为 0, 均有上述表中的矩阵秩为 3 , 从而得 x, y, z 可由 $T_1(f_1)$ 中的生成元表示, 故 $\mathscr{M}_{x,y,z} \subset T_1(f_1)$, 从而有 $\mathscr{M}_{x,y,z} = T_1(f_1)$, 即 $T(g) = \mathscr{M}_{x,y,z} < z >, codimg = 1$. 记 $p = z^2q(x,y,z)$, 则 $p \in T(g) = \mathscr{M}_{x,y,z} < z >$, 且

$g_1(x,y,z) = a_1xz + a_2yz + p = N_1 + p$,

其中 $N_1 = a_1xz + a_2yz = z(a_1x + a_2y), n_1 = a_1x + a_2y$, 则

$$n_{1x} = a_1,\ n_{1y} = a_2,\ n_{1z} = 0,\ xn_{1x} = xa_1,\ yn_{1x} = ya_1,\ zn_{1x} = za_1,$$

$$xn_{1y} = xa_2,\ yn_{1y} = ya_2,\ zn_{1y} = za_2,\ n_1 + zn_{1z} = n_1 = a_1x + a_2y,$$

故有 $T_1(n_1) = \mathscr{M}_{x,y,z}$, 这说明 $T(N_1) = \mathscr{M}_{x,y,z} < z >= T(N_1 + P) = T(g_1)$, 由引理 3 知 $g_1 \sim N_1 = (a_1x + a_2y)z$. 在 $\mathbb{R}^3$ 空间作如下坐标变换, 保持 z 轴不动在 xy 平面上作一定角度旋转后得 $g \sim axz$, 再改变 x 轴上的度量尺度, 可得 $g \sim xz$.

当 $l = 2$ 时,$q(0) \neq 0, h_{xx}(0)h_{yy}(0) - h_{xy}^2(0) \neq 0$ 时, 由引理 5 知 $codimg = 3$. 我们分 $h_{xx}(0) \neq 0$, 或 $h_{yy}(0) \neq 0$, 和 $h_{xx}(0) = h_{yy}(0) = 0, h_{xy}(0) \neq 0$ 两种情形进行讨论. 因为这时 $T_1(f) =< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >, T(g) = \varepsilon_{x,y,z} < z >< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >= \varepsilon_{x,y,z} < \mathscr{M}_{x,y}^2 \cdot z, z^2 >$,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= zq(0) + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0) \\ &+ xzq_x(0) + yzq_y(0) + z^2q_z(0) + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= z(zq(0) + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0) \\ &+ xz^2q_x(0) + yz^2q_y(0) + z^3q_z(0) + \cdots). \end{aligned}$$

记 $f_2(x,y,z) = zq(0) + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0)$, 则

$$f_{2x}(x,y,z) = 2xh_{xx}(0) + 2yh_{xy}(0),_{2y}(x,y,z) = 2xh_{xy}(0) + 2yh_{yy}(0),$$

$$f_{2z}(x,y,z) = q(0),_{2x}(x,y,z) = 2x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0),$$

$$yf_{2x}(x,y,z) = 2xyh_{xx}(0) + 2y^2h_{xy}(0),_{2x}(x,y,z) = 2xzh_{xx}(0) + 2yzh_{xy}(0),$$

$$xf_{2y}(x,y,z) = 2x^2h_{xy}(0) + 2xyh_{yy}(0), yf_{2y}(x,y,z) = 2xyh_{xy}(0) + 2y^2h_{yy}(0),$$

$$zf_{2y}(x,y,z) = 2zxh_{xy}(0) + 2yzh_{yy}(0),$$

$$f_2(x,y,z) + zf_{2z}(x,y,z) = 2zq(0) + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0),$$

显然, $T_1(f_2) \subset< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$, 由 Nakayama 引理, 要证 $< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >\subset T_1(f_2)$, 只要证

$$< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >\subset T_1(f_2) + \mathscr{M}_{x,y,z} < \mathscr{M}_{x,y}^2, z > .$$

为此将 $T_1(f_2)$ 中的生成元截去 $\mathscr{M}_{x,y,z} < \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$ 中的项后用 $< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$ 的生成元表示列成表 4.

表 4 中矩阵的秩等于下面矩阵的秩,

$$\begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ h_{xx}(0) & 2h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 2q(0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q(0) \end{pmatrix},$$

当 $h_{xx}(0) \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) \\ h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) \\ 0 & h_{yy}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{xx}(0)} & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{xx}(0)} \end{pmatrix}$$

表 4:

	x^2	xy	y^2	z
xf_{2x}	$2h_{xx}(0)$	$2h_{xy}(0)$		
yf_{2x}		$2h_{xx}(0)$	$2h_{xy}(0)$	
zf_{2x}				
xf_{2y}	$2h_{xy}(0)$	$2h_{yy}(0)$		
yf_{2y}		$2h_{xy}(0)$	$2h_{yy}(0)$	
zf_{2y}				
f_2+zf_{2z}	$h_{xx}(0)$	$2h_{xy}(0)$	$h_{yy}(0)$	$2q(0)$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $h_{yy}(0) \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) \\ h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} h_{xx}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{yy}(0)} & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) - \frac{h_{xy}^2(0)}{h_{yy}(0)} & 0 \\ h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

若 $h_{xx}(0) = h_{yy}(0) = 0, h_{xy}(0) \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} h_{xx}(0) & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xx}(0) & h_{xy}(0) \\ h_{xy}(0) & h_{yy}(0) & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & h_{yy}(0) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & h_{xy}(0) & 0 \\ 0 & 0 & h_{xy}(0) \\ h_{xy}(0) & 0 & 0 \\ 0 & h_{xy}(0) & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

无论何种情况，表 4 中矩阵的秩均为 4，其逆矩阵存在，这说明 $< \mathscr{M}_{x,y}^2, z >$ 的生成元

可以用 $T_1(f_2)$ 表示 , 故 $T_1(f_2) =< \mathscr{M}^2_{x,y}, z >, T(zf_2) = \varepsilon(x,y,z) < z >< \mathscr{M}^2_{x,y}, z >= T(zf_2 + P)$, 其中 $P = xz^2q_x(0) + yz^2q_y(0) + z^3q_z(0) + \cdots \in T(g)$. 由引理 3 知 $g \sim zf_2(x,y,z) = z(zq(0) + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0)) \sim z(z + x^2h_{xx}(0) + 2xyh_{xy}(0) + y^2h_{yy}(0))$, 于是由线性代数知

当 $h_{xx}(0)h_{yy}(0) - h^2_{xy}(0) > 0$, 时 $g \sim z(z + x^2 + y^2)$,

当 $h_{xx}(0)h_{yy}(0) - h^2_{xy}(0) < 0$, 时 $g \sim z(z + x^2 - y^2)$.

下面只要找出相应的识别条件.

情形 1 $l = 1, g = z(h(x,y)+zq(x,y,z)), h_x(0), h_y(0)$ 不同时为 0, $g_z = h(x,y)+2zq(x,y,z)+z^2q_z(x,y,z), g_{zx}(0) = h_x(0), g_{zy}(0) = h_y(0)$, 当 $g_{zx}(0), g_{zy}(0)$ 不同时为 0 时,$g \sim xz$.

情形 2 $l = 2$, 当 $g(x,y,0) = 0, g_z(0) = 0, g_{zx}(0) = 0, g_{zy}(0) = 0, g_{zx} = h_x + 2zq_x + z^2q_{zx}, g_{zy} = h_y + 2zq_y + z^2q_{zy}, g_{zxx} = h_{xx} + 2zq_{xx} + z^2q_{zxx}, g_{zxy} = h_{xy} + 2zq_{xy} + z^2q_{zxy}, g_{zyy} = h_{yy} + 2zq_{yy} + z^2q_{zyy}, g_{zxx}(0) = h_{xx}(0), g_{zxy}(0) = h_{xy}(0), g_{zyy}(0) = h_{yy}(0)$, 所以, 当 $g_{zxx}(0)g_{zyy}(0) - g^2_{zxy}(0) > 0$, 时, 当 $g \sim z(z + x^2 + y^2), g_{zxx}(0)g_{zyy}(0) - g^2_{zxy}(0) < 0$, 时 $g \sim z(z + x^2 - y^2)$.

1 参考文献

[1] 郭瑞芝, 任耀庆. 二元边界奇点在 $\mathscr{R}^*_H-$ 等价下的分类及识别 [J]. 湖南师范大学自然科学学报,2008,31(4):7-11.

[2] 李艳青. 分支问题在 t- 等价群作用下的分类 [D]. 长沙: 长沙理工大学,2006.

[3] 王伟. 二元边界奇点的识别 [D]. 长沙: 中南大学,2006.

[4] 李养成. 光滑映射的奇点理论 [M]. 北京: 科学出版社,2002.

[5] 王勇, 孙伟志. 余秩不等于 2 余维为 7 的可微函数芽的分类 [J]. 东北师大学报 (自然科学版),2001,33(4):12-15.

[6] 苏丹. 余维大于 5 小于等于 8 的可微函数芽分类讨论 [D]. 长春: 东北师范大学,2002.

[7] Martinet,J. *Singularities of Smooth Functions and Maps*[M]. Cambridge University Press,1982.